Examen de Probabilités et Statistique
Recrutement international des écoles d'IPParis pour les cycles ingénieurs

NE PAS RETOURNER CETTE PAGE AVANT D'EN AVOIR ETE AVISE.

1. Durée de l'examen: 1 heure 30.
2. L'utilisation d'appareils électroniques n'est pas autorisée.
3. Documents interdits.
4. Vous êtes encouragés à bien lire l'énoncé de chaque exercice avant de commencer à répondre aux questions.
5. Bon courage !

Exercice 1 Lois jointes et lois marginales (4 points)

Soient U et V deux variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer les lois de $2U$ et de $U+V$.
2. On définit les variables $X = \min(U,V)$ et $Y = \max(U,V)$.
   a) Déterminer les lois de X et Y.
   b) Montrer que le couple (X,Y) admet une densité par-rapport à la mesure de Lebesgue, et déterminer cette densité.

Exercice 2 Modes de convergence (9 points)

1. On rappelle que pour tout $\lambda > 0$, une variable de Poisson de paramètre λ est une variable aléatoire X sur $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[X = k] = C(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!},$$

   où $C(\lambda) > 0$ est une constante dépendant de λ.
   a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $C(\lambda) = e^{-\lambda}$.
   b) Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable de Poisson de paramètre $1/n$. Montrer que pour toute suite de réels positifs $(a_n)_{n\geq 1}$ tendant vers $+\infty$, $a_n X_n$ tend vers zéro en probabilité, lorsque $n \to \infty$.
2. Soit $\theta > 0$ et $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $[0,\theta]$. Pour tout $n \geq 1$, soit $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
   a) Montrer que M_n tend vers θ en probabilité, lorsque $n \to \infty$.
   b) Calculer la fonction de répartition de $n(\theta - M_n)$.
   c) En déduire que $n(\theta - M_n)$ converge en loi lorsque $n \to \infty$, en indiquant la fonction de répartition de la loi limite.
   d) En utilisant les questions précédentes, proposer un intervalle de confiance pour θ de niveau 5%, et un intervalle de confiance asymptotique pour θ de niveau 5%.

Exercice 3 Une caractérisation de la loi exponentielle (7 points)

Soit X une variable aléatoire réelle positive. On suppose que X est *sans mémoire*, c'est-à-dire qu'elle satisfait la relation suivante, pour tous $s, t \geq 0$:

$$\mathbb{P}[X > s+t | X > s] = \mathbb{P}[X > t].$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose $G(t) = \mathbb{P}[X > t]$.

1. En utilisant les propriétés élémentaires des probabilités, montrer que la fonction G est décroissante et continue à droite en tout $t \geq 0$, i.e., pour tout $t \geq 0$ et toute suite $(t_n)_{n\geq 1}$ décroissante et tendant vers t, $G(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(t)$.

2. On cherche à montrer l'existence d'un réel $\theta \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $G(t) = \theta^t$.
   a) Montrer que pour tous réels $s, t \geq 0$, $G(s+t) = G(s)G(t)$.
   b) En déduire que pour tout réel $s \geq 0$ et tout entier $k \geq 0$, $G(ks) = G(s)^k$.
   c) Montrer que pour tout entier $q \geq 1$, $G\left(\frac{1}{q}\right) = G(1)^{1/q}$.
   d) En déduire que pour tout nombre rationnel r, $G(r) = G(1)^r$.
   e) Conclure. On utilisera le fait que pour tout $t \geq 0$, il existe une suite de rationnels $(t_n)_{n\geq 1}$ décroissante et tendant vers t.
3. On rappelle que, pour tout $\lambda > 0$, la loi exponentielle de paramètre λ est la loi continue sur $[0, \infty[$ de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0$. Quelle est, nécessairement, la loi de X ?